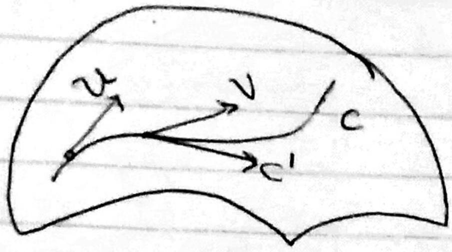
Είχαμε δει το εξής λήμμα:　　　　　　　　　　　　20/03/2018

Αν V, W είναι μοναδιαία διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $c: J \to S$ τότε

$$\left[\frac{DW}{dt}\right]-\left[\frac{DV}{dt}\right]=\frac{d\phi}{dt} \quad \text{όπου } \phi=\measuredangle(V,W)$$

σταθερές διαφορές είναι τα παράλληλα διανυσματικά πεδία

Έστω $c: J \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in J$



Θεωρώ μοναδιαίο παράλληλο διανυσματικό πεδίο V κατά μήκος της c

Από το λήμμα έχω:

$$\left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right]-\cancel{\left[\frac{DV}{ds}\right]}=\frac{d\phi}{ds}, \quad \phi=\measuredangle(\dot{c},V)$$

Άρα $k_g=\dfrac{d\phi}{ds}$, $\phi=\measuredangle(\dot{c},V)$

Υπενθύμιση:

$$\left[\frac{DW}{dt}\right]=\left\langle \frac{dW}{dt}, N\times W\right\rangle$$

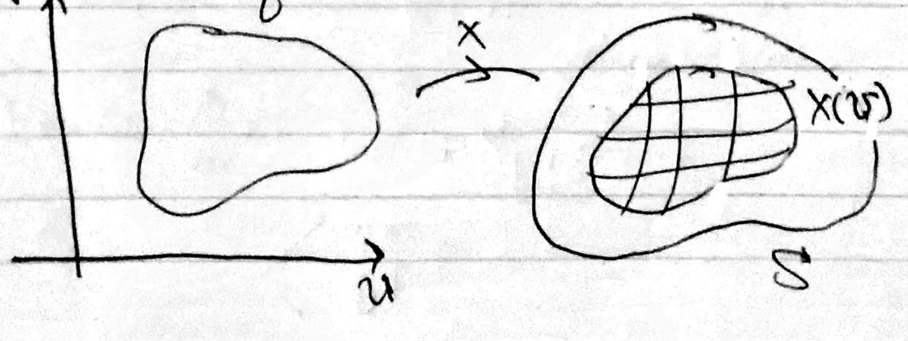
και

W παράλληλο $\Leftrightarrow \left[\dfrac{DW}{dt}\right]=0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε σημείο p κανονικής προσανατολισμένης επιφάνειας S υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $x: \mathcal{U} \to S$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $p \in x(\mathcal{U})$ (γύρω από κάθε σημείο μπορώ να βρω τέτοιο σύστημα)

(ii) $F=\langle x_u, x_v\rangle=0$ (ορθογώνιο σύστημα = οι παραμετρικές του καμπύλες τέμνονται κάθετα)



$$N\circ x=\frac{x_u\times x_v}{\|x_u\times x_v\|}$$

(Θεώρημα χωρίς απόδειξη)

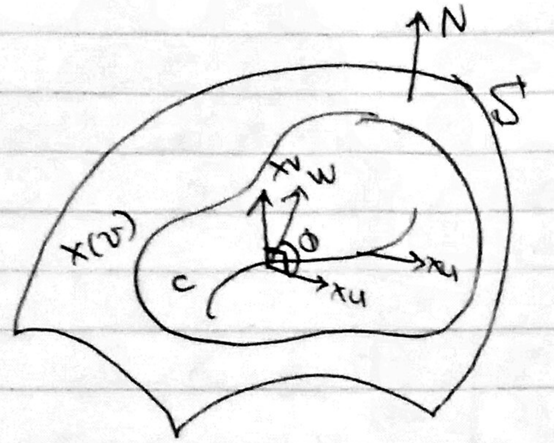
Λήμμα: (Υπολογισμός $\left[\frac{DW}{dt}\right]$)

Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού της S

$c: I \subset \mathbb{R} \to X(U)$ με $c(t) = X(u(t), v(t))$ και W διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c με $\|W(t)\| = 1 \ \forall t$.

Τότε:

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\phi}{dt} \quad \text{με } \phi = \measuredangle(W, X_u)$$



Απόδειξη: Έστω $e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|} = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$

$$e_1 \times e_2 = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG}} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = N \circ X$$

↳ αφού έχουμε ορθογώνιο σύστημα.

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \frac{d\phi}{dt}, \quad \phi = \measuredangle(W, e_1) = \measuredangle(W, X_u)$$

Υπολογισμός: (θεωρώ το e_1 κατά μήκος της καμπύλης)

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right](t) = \left\langle \frac{d}{dt}\left(e_1(u(t), v(t))\right), N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t))\right), e_2 \right\rangle =$$

κανόνας αλυσίδας

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}(u(t), v(t))\right) X_u(u(t), v(t)) + \frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\frac{du}{dt}(t) X_{uu}(\dots) + \frac{dv}{dt}(t) X_{uv}(\dots)\right\}, \frac{X_u}{\sqrt{G}} \right\rangle \longrightarrow$$

(Παραλείπαμε τα $(u(t), v(t))$ για λόγους ευκολίας:

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{du}{dt} \langle x_{uu}, x_v \rangle + \frac{dv}{dt} \langle x_{uv}, x_v \rangle \right\} \quad \circledast$$

Έχουμε:

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = \cancel{\langle x_u, x_v \rangle_u}^{\,0 \text{ αφού είναι μηδενική συνάρτηση.}} - \langle x_u, x_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} \langle x_u, x_u \rangle_v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_{uu}, x_v \rangle = -\frac{1}{2} E_u}$$ άρα η $\circledast$ γίνεται:

$$\circledast = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{du}{dt} \langle x_{uu}, x_v \rangle - \frac{1}{2} E_u \frac{du}{dt} \right\}$$

Έχουμε:

$$\boxed{\langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} \langle x_v, x_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u.}$$ άρα η σχέση γίνεται:

$$\circledast = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{1}{2} G_u \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} E_u \frac{du}{dt} \right\}$$

Άρα αποδείχθηκε.

Λήμμα: (Υπολογισμός της K_g)

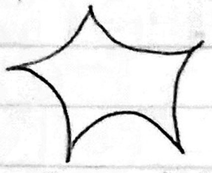
Έστω $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to S$ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμένου της S και $c(s) = X(u(s),v(s))$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$. Τότε:

$$K_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG(u(s),v(s))}}\left\{G_u(u(s),v(s))\frac{dv(s)}{ds} - E_v(u(s),v(s))\frac{du(s)}{ds}\right\} + \frac{d\phi}{ds}$$

όπου $\phi(s) = \sphericalangle\left(\dot{c}(s), X_u(u(s),v(s))\right)$

ΑΠΛΕΣ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ.

Κορυφές είναι σημεία όπου δεν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτόμενο

πχ: 

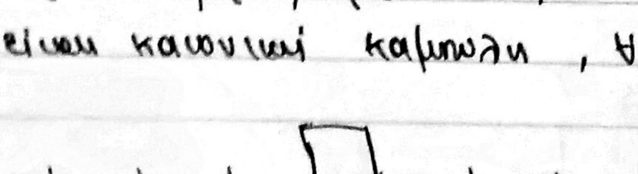
έχει 5 κορυφές

Ορισμός: Μια απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη επιφάνειας S είναι κάθε συνεχής απεικόνιση $c:[0,l]\to S$ τέτοια ώστε:

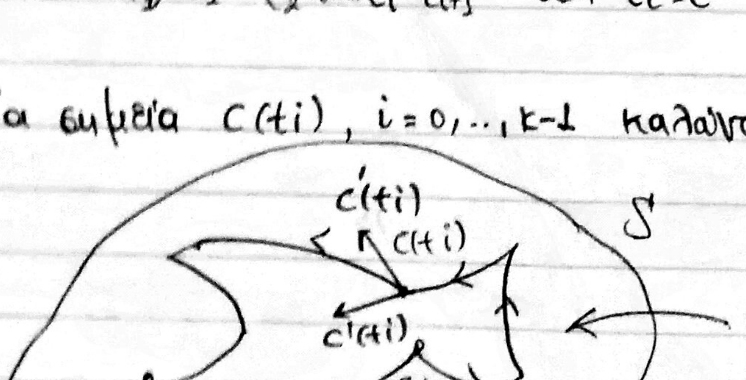
(i) $c(0)=c(l)$

(ii) $c|_{[0,l)}$ είναι 1-1

(iii) Υπάρχει διαμέριση $\{t_0=0<t_1<\dots<t_k=l\}$ ώστε $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ είναι κανονική καμπύλη, $\forall i=0,\dots,k-1$.

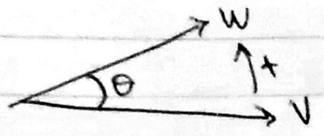


Τα σημεία $c(t_i)$, $i=0,\dots,k-1$ καλούνται κορυφές της καμπύλης



"καμπύλη ψάρι"
αυτή είναι μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη.

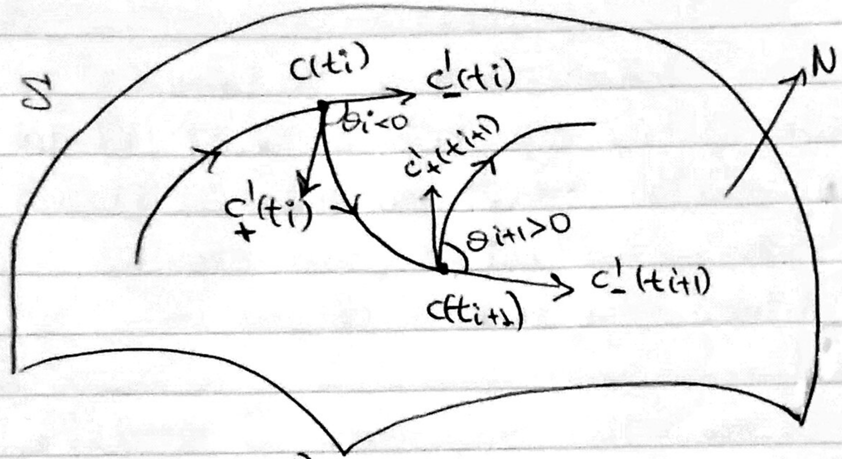
▸ Αν έχω δύο διανύσματα



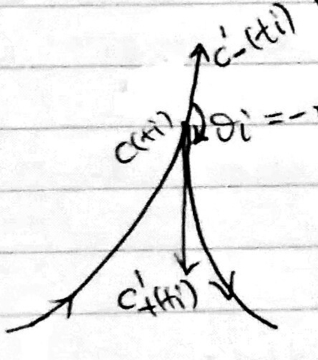
η προσανατολισμένη γωνία $\measuredangle(v,w) = +\theta$.
ενώ $\measuredangle(w,v) = -\theta$

Επιπεδο.

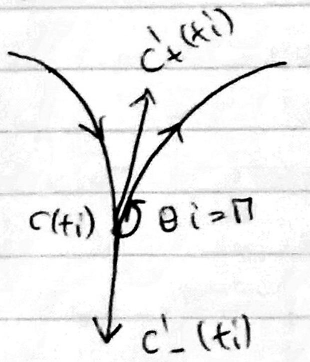
▸ Στις επιφάνειες ισχύει πάλι αυτό, εφόσον μιλάμε για προσανατολισμένες επιφάνειες.



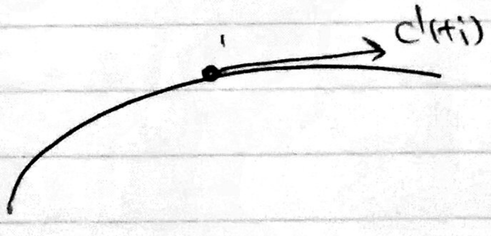
Η εξωτερική γωνία της κορυφής $c(t_i)$ είναι η προσανατολισμένη γωνία $\theta_i = \measuredangle(c'_-(t_i), c'_+(t_i))$ με $\theta_i \in [-\pi, \pi]$



και.



Υπάρχει το ενδεχόμενο $\theta_i = 0$, τότε θα είναι ένα κανονικό τόξο



► Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ ορθογώνιο σύστημα συντ/νων του προσανατολισμού και $c:[0,l] \to X(U)$ απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη με $c(t_i)$ και αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες θ_i, τι ορίζονται γωνιακές συναρτήσεις $\phi_i:[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ με $\phi_i(t) = \measuredangle(c'(t), X_u)$

καθε κανονικό τόξο είναι κανονική καμπύλη

Θέλω το U να γίνεται ομοιόμορφο τρίγωνο στο δίσκο

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ:
Αν U είναι ομοιόμορφο με τον δίσκο τότε

$$\sum_i \left(\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)\right) + \sum \theta_{t_i} = \pm 2\pi.$$

► Η καμπύλη "ψάρι" έχει κατά τμήματα παράμετρο το μήκος τόξου. Για να βάλουμε παράμετρο το μήκος τόξου, πάμε σε κάθε τμήμα της και θεωρούμε ως αφετηρία το $c(t_i)$ και πέρας το $c(t_{i+1})$. Σε κάθε τμήμα αλλάζει το αρχικό σημείο, και έτσι με αυτόν τον τρόπο έβαλα μήκος τόξου σε κάθε τμήμα.

Ορισμός: Μιά απλή περιοχή R κανονικής επιφάνειας S είναι ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο μαζί με το ∂R το οποίο είναι ομοιόμορφο με τον κλειστό δίσκο και $\partial R = c([0,l])$, όπου $c:[0,l] \to S$ απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη

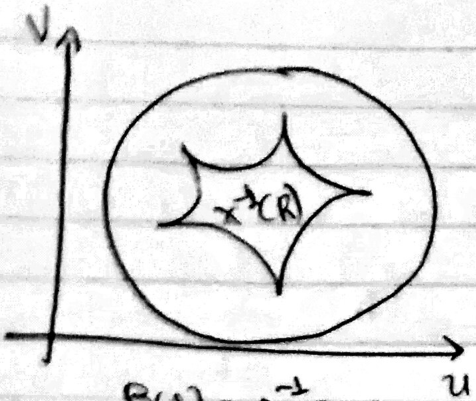
$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds}\right\} + \frac{d\phi_i}{ds}, \text{ στο } [s_i, s_{i+1}]$$
$$\phi_i = \measuredangle(\dot{c}, x_u)$$

και η συνολική γεωδαισιακή καμπυλότητα είναι:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}\right] ds + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds}\,ds$$

→

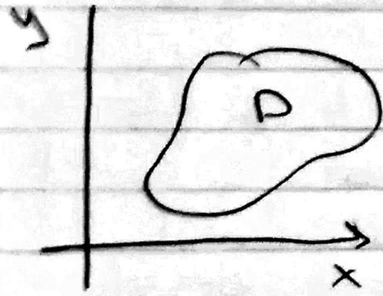
$$\sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left\{-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds}+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}\right\}ds + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\phi_i(s_{i+1})-\phi_i(s_i)\right)$$



$$\oint_B\left(-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}du+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}dv\right)$$

$B(s) = x^{-1}\circ C(s) = (u(s),v(s))$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Gauss-Green για επιφάνειες:



$$\oint_\gamma Pdx+Qdy = \iint_D (Q_x-P_y)\,dxdy$$

Άρα από Θεώρημα Gauss-Green:

απορρόφησα το "−"

$$\oint_B\left(-\overset{P}{\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}}du+\overset{Q}{\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}}dv\right) = \iint_{x^{-1}(R)}\left[\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u+\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v\right]du\,dv$$

Τι μου θυμίζει η ποσότητα στην οποία κατέληξα;
Το Έξοχο Θεώρημα

Θα γράψουμε το Έξοχο Θεώρημα σε αυτήν τη μορφή:

$\longrightarrow$

$\boxed{\text{Έξοχο Θεώρημα}}$ (Για ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_u = -K\circ x\cdot\sqrt{EG}$$

Σχέση (A)

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds = -\iint_{x^{-1}(R)} (K\circ x)\cdot\sqrt{EG}\,du\,dv + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\varphi_i(s_{i+1})-\varphi_i(s_i)\right)}$$

Καταλήξαμε σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα.

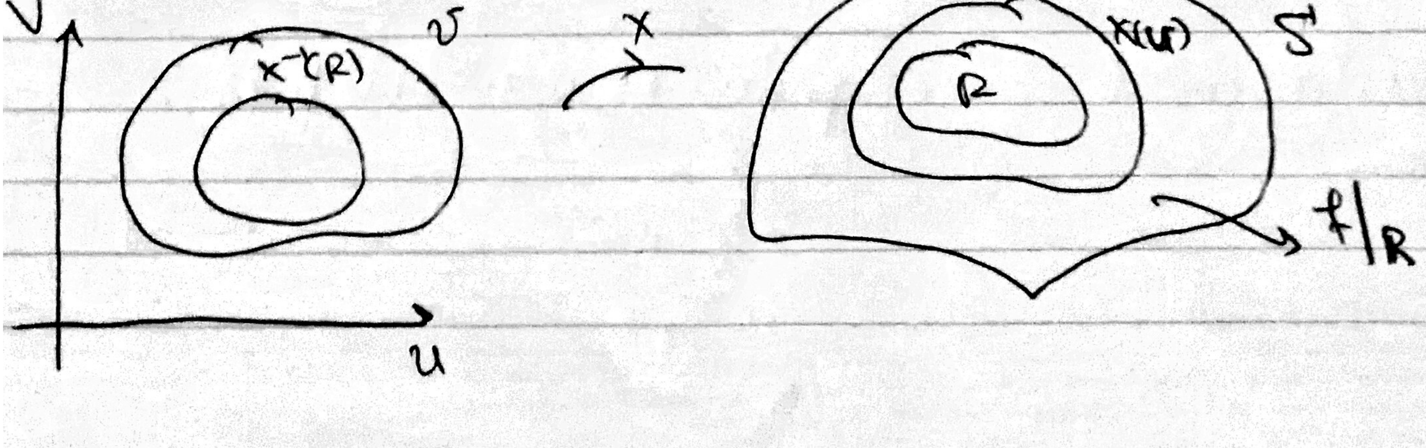
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $Q \subset S$ και $f: S \to \mathbb{R}$ συνεχής και $x: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού ώστε $R \subset x(U)$. Καλούμε επιφανειακό ολοκλήρωμα της f στο R τον αριθμό:

$$\iint_R f\,d\sigma = \iint_{x^{-1}(R)} f\circ x(u,v)\cdot\|x_u\times x_v\|\,du\,dv \qquad \underline{\underline{\|x_u\times x_v\| = \sqrt{EG-F^2}}}$$

$$= \iint_R f\,d\sigma = \iint_{x^{-1}(R)} f\circ x\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων x



Άρα βάσει αυτού του ορισμού η σχέση (A) γίνεται:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds = -\iint_R k d\sigma + 2\pi - \sum_{i=0}^{k-1}\theta_i$$

<u>Τοπικό</u> Θεώρημα Gauss-Bonnet:
Έστω $\chi: U \subset \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού και U ομοιομορφική με τον κλειστό δίσκο, και $R \subset \chi(U)$ απλή περιοχή της οποίας ∂R είναι η ένωση μιας κλειστής κατά τμήματα κανονικής καμπύλης c με παράμετρο το μήκος τόξου και κορυφές $c(s_i)$, $s=0,..k$ με αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες θ_i. Τότε ισχύει:

Απλή περιοχή = ομοιομορφική με τον κλειστό δίσκο

$$\iint_R k d\sigma + \sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \sum_{i=0}^{k-1}\theta_i = \pm 2\pi .$$

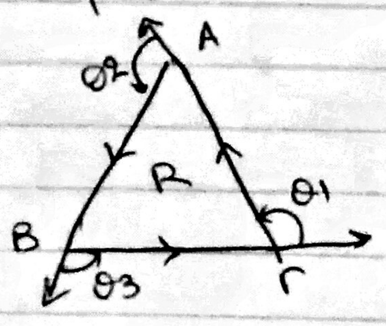
Μια καμπύλη είναι γεωδαισιακή αν $k_g=0$

[Η απόδειξη του θεωρήματος είναι η προηγούμενη διερεύνηση]

Λέγεται τοπικό γιατί εξαρτάται από ένα συστήματος συντεταγμένων. Εμείς θέλαμε να το διατυπώσαμε γενικά

Αν εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στο επίπεδο του τετραδίου σε ένα τρίγωνο έχουμε:

$K=0$



$$\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 2\pi$$

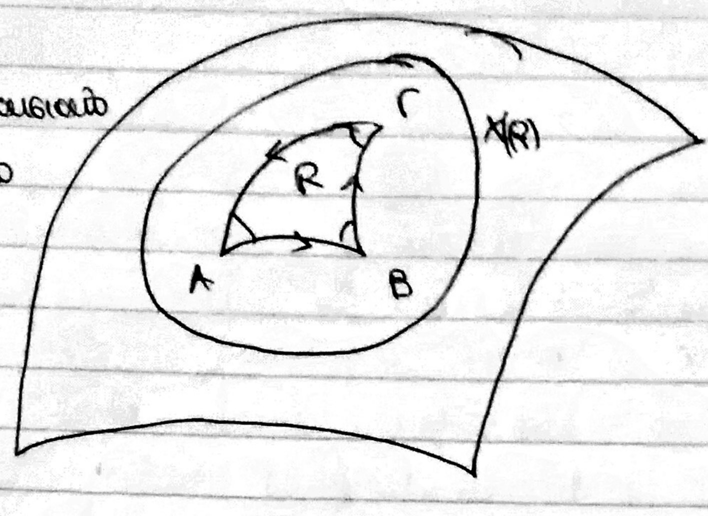
$$3\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = \pi}$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το θεώρημα της παραλληλίας

$\longrightarrow$

Θεωρώ απλή περιοχή $R \subset X(U)$ που το ∂R έχει 3 εξωτερικές γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ και κάθε κανονικό τόξο είναι γεωδαισιακή

R: γεωδαισιακό τρίγωνο



$$\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \Leftrightarrow \iint_R K dt + 3\pi - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \iint_R K d\sigma = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \pi$$

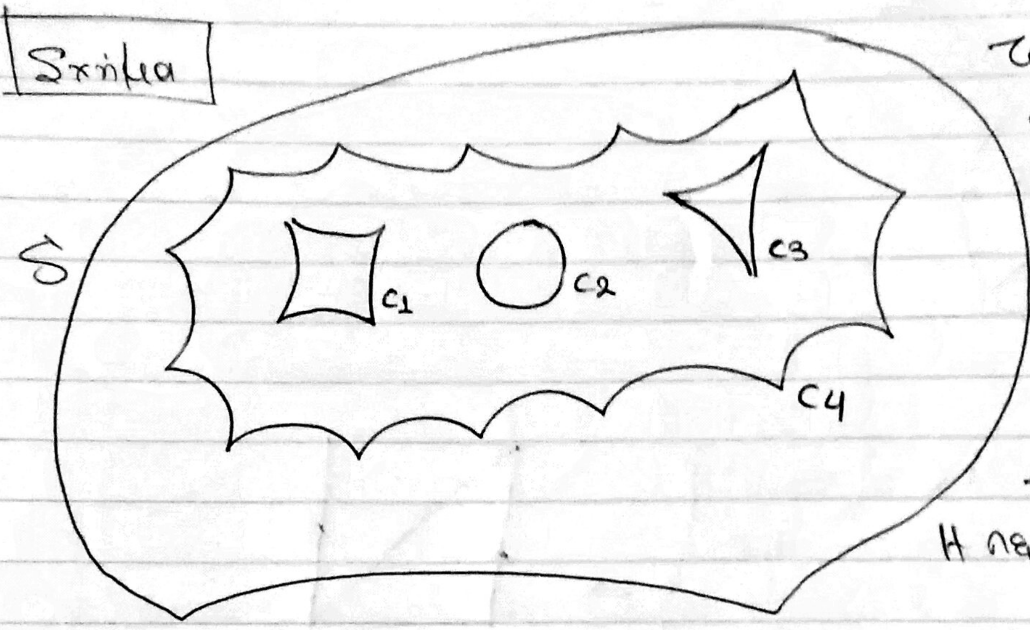
Αν $K<0$ τότε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι $\omega_1+\omega_2+\omega_3 < \pi$
Άρα η παραλληλία δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις και εξαρτάται από την καμπυλότητα Gauss

Γνωρίζουμε ότι:
Απλή περιοχή είναι μια περιοχή ομοιομορφική με τον δίσκο όπου το σύνορό της είναι μια απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη.

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

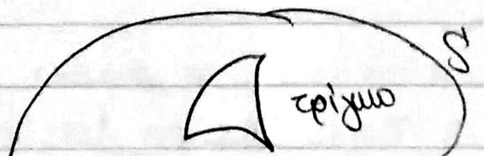
<u>Ορισμός</u>: Καλούμε κανονική περιοχή R μιας επιφάνειας S ένα συμπαγές σύνολο συνεκτικό με μη-κενό εσωτερικό του οποίου το σύνορο ∂R είναι πεπερασμένη ένωση απλών κλειστών κατά τμήματα κανονικών καμπυλών οι οποίες ανά δύο δεν τέμνονται.

Σχήμα



Τα c_1, c_2, c_3, c_4 είναι οι απλές κλειστές κατά τμήματα κανονικές καμπύλες που αποτελούν το σύνορο της κανονικής περιοχής της επιφάνειας S.
Η περιοχή έχει 3 "τρύπες"

<u>Ορισμός</u>: Τρίγωνο μιας επιφάνειας S είναι μια απλή περιοχή με 3 κορυφές και αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες $\neq 0$

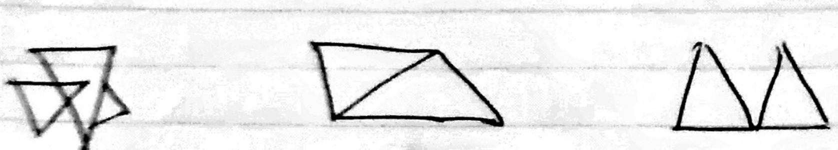


<u>Ορισμός</u>: Καλούμε τριγωνοποίηση μιας κανονικής περιοχής $R \subset S$ μια πεπερασμένη οικογένεια τριγώνων

$$\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\} \text{ τω :}$$

(i) $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = R$ (ii) Αν $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ τότε $T_i \cap T_j =$ κορυφή ή πλευρά μόνο.

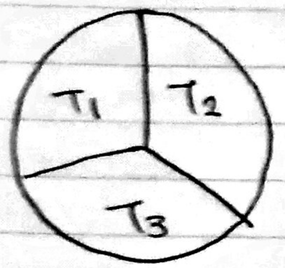
Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό:



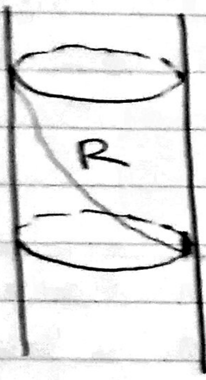
όχι — Ναι — Ναι.

Παραδείγματα τριγωνοποίησης:

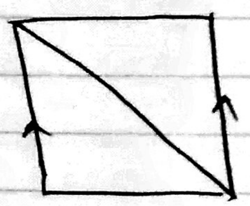
①



②



Για να κάνω τριγωνοποίηση του κυλίνδρου τον "ξετυλίγω" και κάνω τριγωνοποίηση του επιπέδου →

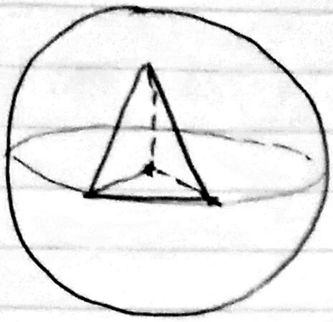


όμως αν το τυλίξω ξανά θα χάσω την μία πλευρά

▶ Οι συμπαγείς περιοχές είναι κανονικές χωρίς σύνορο (όχι το τοπολογικό)

Συμπέρασμα: Κάθε συμπαγής επιφάνεια είναι κανονική περιοχή με σύνορο το $\emptyset$ (όπως σφαίρα, τόρος κλπ)

Αφού η σφαίρα είναι κανονική επιφάνεια πως θα φτιάξω μια τριγωνοποίησή της;



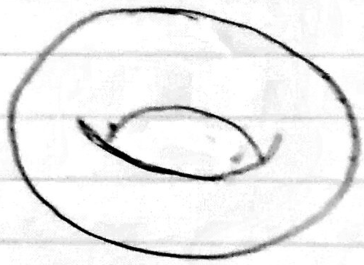
Δημιουργώ μια πυραμίδα μέσα στην σφαίρα

Πώς γίνεται η τριγωνοποίηση του τόρου;

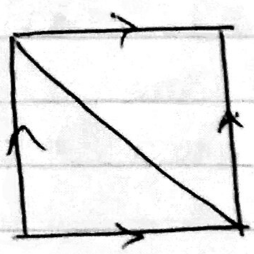
Παίρνω έναν κύλινδρο με άκρα

και ενώνω

τα άκρα ώστε να σχηματισθεί



άρα θα έχω την τριγωνοποίηση του κυλίνδρου ουσιαστικά, χάνοντας μια πλευρά



ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε κανονική περιοχή δέχεται μια τουλάχιστον τριγωνοποίηση (και άρα άπειρες)

Επομένως η τριγωνοποίηση δεν είναι μοναδική

Για κάθε τριγωνοποίηση κανονικής περιοχής R ορίζω τους αριθμούς

$F(\tau)$ = πλήθος τριγώνων
$E(\tau)$ = πλήθος ακμών
$V(\tau)$ = πλήθος κορυφών

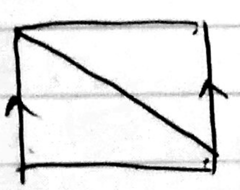
Εφαρμογή: ▶ Στην τριγωνοποίηση της σφαίρας:

$$E(\tau)=6, \quad F(\tau)=4, \quad V(\tau)=4.$$

▶ Στην τριγ. του κύκλου:

$$E(\tau)=6, \quad F(\tau)=3, \quad V(\tau)=4$$

▶ Στην τριγ. του κυλίνδρου: (Προσοχή γιατί ξανακολλάω!!)

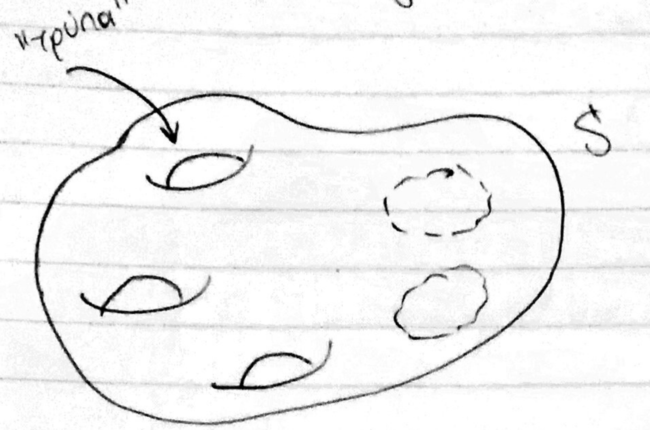


$$F(\tau)=2, \quad E(\tau)=4, \quad V(\tau)=2$$

Πριν την κόλληση έχω 5 ακμές αλλά μετά την κόλληση χάνω την μία

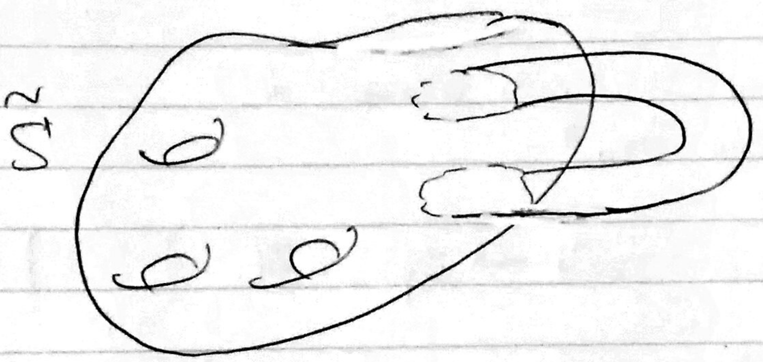
Επίσης, μετά την κόλληση χάνω 2 κορυφές γιατί θα ταυτιστούν.

▸ Έστω S συμπαγής επιφάνεια με τριγωνοποίηση T



Παίρνω 2 δίσκους και ~~και~~ σχηματίζω κύλινδρο τον οποίο τον λυγίζω και σχηματίζεται ένα "χερούλι"

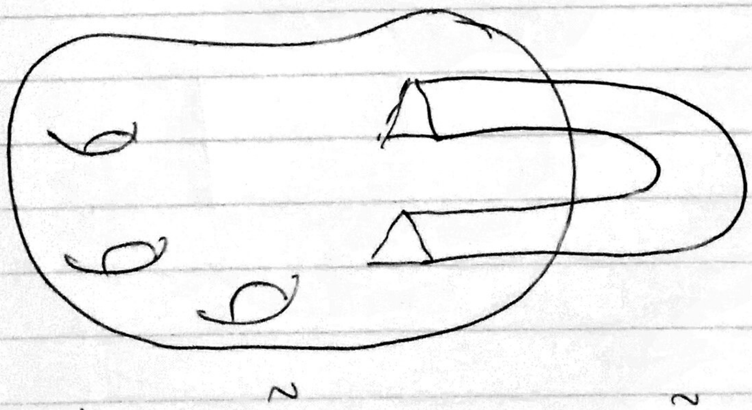
Το χερούλι το κολλάω πίσω και θα γίνει:



Άρα θα έχω $\tilde{S} = S +$ χερούλι

$F, E, V \sim \tilde{F}, \tilde{E}, \tilde{V}$

Αν αντί για δίσκους είχα τρίγωνα θα είχα αντί για κύλινδρο ένα πρίσμα.



Δεν θα άλλαζε κάτι!

Άρα $\tilde{F} = F - 2 + 2 = F$, $\tilde{E} = E - 6 + 4 = E - 2$

και $\tilde{V} = V - 6 + 2 = V - 4$

Ορισμός:

Χαρακτηριστική Euler-Poincare μιας τριγωνοποίησης τ μιας περιοχής R είναι ο αριθμός

$$\chi(R,\tau) = F(\tau) - E(\tau) + V(\tau)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\chi(R,\tau)$ είναι ανεξάρτητο της τριγωνοποίησης

Άρα
- για τη σφαίρα : $\chi(S^2)=2$.
- για τον δίσκο : $\chi(D)=1$
- για τον κύλινδρο : $\chi(R)=0$
- για το σχήμα με το χερούλι : $\chi(\tilde{S}) = \tilde{F} - \tilde{E} + \tilde{V} = F-(E-2)+V-4 = \chi(S)-2$

"Κάθε φορά που κολλάω ένα χερούλι αφαιρώ 2 από την χαρακτηριστική"

Αν στην σφαίρα κολλήσω χερούλι → τόρος : $\chi(\circledcirc)=\chi(S^2)-2 = 0$

Αν στον τόρο κολλήσω χερούλι → διπλός τόρος : $\chi(\text{διπλού τόρου}) = \chi(\text{τόρου})-2$

Η μόνη επιφάνεια που έχει θετική χαρακτηριστική είναι η σφαίρα.